b- $(O'H)//(AO)$ de plus $AO=O'H$ car $O'H=OA' = AO$

$\Rightarrow$ $O'HOA$ est un parallélogramme

et puisque $I=O*O'$ alors $I=A*H$

$\Rightarrow IA=IH \Leftrightarrow I \in$ à la médiatrice de $[AH]$.

Aussi $N \in$ à la médiatrice de $[AH]$ (car $NA=NH$)

D'où (NI) est la médiatrice du segment $[AH]$

et comme H est le projeté orthogonal de N sur la directrice (d) de la parabole alors (NI) est la tangente en N a cette parabole.

EXERCICE 2

1)a- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

α est solution réelle de (E) $\Leftrightarrow \alpha^3-2(3+i)\alpha^2+(8+9i)\alpha+3-9i=0$

$\Leftrightarrow (\alpha^3-6\alpha^2+8\alpha+3)+i(-2\alpha^2+9\alpha-9)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3-6\alpha^2+8\alpha+3=0 \\ -2\alpha^2+9\alpha-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3-6\alpha^2+8\alpha+3=0 \\ \alpha=\frac{3}{2} \text{ ou } \alpha=3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha = 3$ car 3 vérifie aussi la première équation.

★3 est une racine du polynome $P(z)=z^3-2(3+i)z^2+(8+9i)z+3-9i$

$\Rightarrow$ Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $P(z)=(z-3)(az^2+bz+c)$; $\forall z \in \mathbb{C}$

$P(z) = (z-3)(az^2+bz+c)$; $\forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow P(z) = az^3+(-3a+b)z^2+(-3b+c)z-3c$; $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -3a+b=-2(3+i) \\ -3b+c=8+9i \\ -3c=3-9i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3-2i \\ c=-1+3i \end{cases}$$

Donc $P(z) = (z-3)(z^2-(3+2i)z-1+3i)$

$\otimes$ (E) $\Leftrightarrow (z-3)(z^2-(3+2i)z-1+3i)=0$

$\Leftrightarrow z=3$ ou $z^2-(3+2i)z-1+3i=0$

$(\Delta = (3+2i)^2-4(-1+3i)=9)$

$$\Leftrightarrow z=3 \text{ ou } z=\frac{3+2i-3}{2} \text{ ou } z=\frac{3+2i+3}{2}$$

$\Leftrightarrow z=3$ ou $z=i$ ou $z=3+i$.

Or $|3+i|=\sqrt{10}$ et $|i|=1$ alors les solutions de (E) sont : α, $z_1=3+i$ et $z_2=i$.

b- • $\text{aff}(\overrightarrow{OA}) = 3-0=3$ et $\text{aff}(\overrightarrow{CB}) = 3+i-i=3$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow$ OABC est un parallélogramme. (1)